УДК 517. 926.2

О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ БИЦАДЗЕ СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ И ОКРУЖНОСТЬЮ

Н.Р. Раджабов*, **А.Б. Расулов****

*Таджикский национальный государственный университет,
ул.Рудаки,17, Душанбе, 734019, Таджикистан, e-mail: nusrat38@mail.ru;
**Московский энергетический институт,
ул. Красноказарменная, 14, 111250, Москва, e-mail: rasulov_abdu@rambler.ru

Аннотация. Для эллиптической системы второго порядка с сверхсингулярной окружностью найдено интегральное представление решения и соответствующие формулы обращения. Полученные интегральные представления могут быть применены в исследовании поведения решений при $r \to R$, а также в исследовании граничных задач.

Ключевые слова: эллиптическая система, интегральные представления, сверхсингулярная окружность, задачи типа Дирихле.

1. Введение

Пусть D – круговая область с радиусом R, центром в начале координат, ограниченная замкнутым контуром ∂D. Далее, пусть $D_\varepsilon = D \setminus d_\varepsilon$, где $d_\varepsilon = \{z : R - \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R\}$. В области D_ε рассмотрим систему уравнений со сверхсингулярной окружностью $\partial D = \{z : |z| = R\}$:

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + 2(-1)^j \frac{\partial^2 U_{3-j}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + 2\left[\frac{a_j}{(R-r)^n}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) + (-1)^j \frac{a_{3-j}}{(R-r)^n}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y}\right)\right]$$

$$+ \frac{4}{(R-r)^{2n}}\left(b_1(x,y)U_j(x,y) + (-1)^j b_2(x,y) U_{3-j}(x,y)\right) = \frac{4 f_j(x,y)}{(R-r)^{2n}}, \qquad j = 1, 2; \qquad (1)$$

где $U_1(x,y)$ и $U_2(x,y)$ – искомые функции, коэффициенты $a_k(x,y)$, $b_k(x,y) \in C^1(D \cup L)$ ограничены в начале координат, $f_k(x,y) \in C^1(D_0 \cup L)$, $k = \overline{1,2}$, $n \in R^+ = (0, \infty)$, $r = |z|$.

Вводим обозначения $U(z) = U(x,y) + iU(x,y)$, $2\partial_{\bar z} = \partial_x + i\partial_y$,

$$a_1(x,y) + ia_2(x,y) = a(z) = e^{i\theta} a_0(z); \quad b_1(x,y) + ib_2(x,y) = b(z) = e^{2i\theta} b_0(z);$$

$$e^{ik\theta} = \cos k\theta + i \sin k\theta, \ k = 1, 2; \quad \theta = \arg z; \quad a_0(z) = a_0^1(x,y) + i a_0^2(x,y);$$

$$b_0(z) = b_0^1(x,y) + i b_0^2(x,y).$$

Тогда система (1) эквивалентна следующей системе уравнений со сверхсингулярной окружностью и с оператором Бицадзе

$$L_n^2 U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \bar z^2} + \frac{a(z)}{(R-r)^n} \frac{\partial U}{\partial \bar z} + \frac{b(z)}{(R-r)^{2n}} U = \frac{f(z)}{(R-r)^{2n}},$$

Уравнение (1) при $n < 1$ называется уравнением *со слабой особенностью*, при $n = 1$ – уравнением *с сингулярной окружностью*, а при $n > 1$ – уравнением *со сверхсингулярной окружностью*. Еще 1948г. А.В. Бицадзе [1] доказал некорректность постановки задачи Дирихле для уравнения $\partial^2 U/\partial \bar{z}^2 = 0$, которая, в настоящее время, носит его имя. В вещественном форме эта задача принимает вид

$$U_{1xx} - U_{1yy} - 2U_{2xy} = 0\,,$$

$$2U_{1xy} + U_{2xx} - U_{2yy} = 0\,.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что при любом целом положительном n функции

$$U_{1n}(x,y) = \left(r^{n-1} - \frac{r^{n+1}}{R^2}\right)\cos(n-1)\varphi\,, \qquad U_{2n}(x,y) = \left(r^{n-1} - \frac{r^{n+1}}{R^2}\right)\sin(n-1)\varphi$$

являются регулярными решениями системы, исчезающими на границе D.

Существенный вклад в развитие таких и общих эллиптических систем с регулярными коэффициентами внес А.П. Солдатов [7,8]. Модифицированное уравнение Бицадзе с добавленными младшими производными в случае регулярных коэффициентов было исследовано также Р.С. Саксом [9,10], Н.Е. Товмасяном [11] и другими. Существует класс систем эллиптических уравнений с регулярными, а также сингулярными коэффициентами, для которых обычные постановки краевых задач (задача Дирихле, Неймана и др.) являются некорректными. Поэтому возникает естественный вопрос: какие соображения должны быть положены в основу корректности краевых задач для таких систем? На возможную практическую ценность обобщенной системы Коши-Римана обращали внимание А. Пуанкаре, Д. Гильберт и другие математики. Развивая их идеи, И.Н. Векуа [3] построил теорию обобщенных аналитических функций. Все основные положения теории обобщенных аналитических функций перенесены для эллиптических систем с сингулярной точкой

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{a(z)}{r}U + \frac{b(z)}{r}\bar{U} = \frac{f(z)}{r}\,.$$

Л.Г. Михайлов [3] и З.Д.Усманов [6], развивая эту теорию, показали практическую значимость такого рода систем. Н.Р. Раджабовым впервые исследованы уравнения со сверхсингулярными коэффициентами [4] и уравнения с более сложной геометрией сингулярности (например, с сингулярной окружностью). В [5] Н.Р. Раджабовым исследовано задачи типа Римана-Гильберта для системы уравнений с сингулярной точкой и окружностью:

$$\Delta U_j + \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{a_{ij}(x,y)}{(R-r)r}\frac{\partial U_s}{\partial x} + \frac{b_{js}(x,y)}{(R-r)r}\frac{\partial U_s}{\partial y} + \frac{c_{ij}(x,y)}{(R-r)^2r^2}U_s\right] = \frac{f_j(x,y)}{(R-r)^2r^2}\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n\,.$$

В нашей совместной работе [12] в области рассмотрена следующая система

$$\frac{\partial^n W}{\partial \bar{z}^n} + \frac{A_1(z)}{a(z)\bar{z}+b(z)}\frac{\partial^{n-1}W}{\partial \bar{z}^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n(z)W}{(a(z)\bar{z}+b(z))^n} = \frac{f(z)}{(a(z)\bar{z}+b(z))^n}\,,$$

где $A_k(z)$, $k = \overline{1,k}$ – аналитические функции, $a(z)$ и $b(z)$ – некоторые полиномы от комплексного переменного z, $a(z) \neq 0$, $f(z,\bar{z})$ – комплекснозначная функция переменных z и $\bar{z}$, $W(z) = U(x,y) + iV(x,y)$. Для этой системы в областях, содержащих сингулярное многообразия E_0^+, E_0^-, E_0^γ, найдены интегральные представления решений, содержащие произвольные аналитические функции переменного z, и исследовано граничных задач типа Шварца, линейного сопряжения, Римана – Гильберта и др. Далее, нами исследованы эллиптические уравнения второго порядка:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} + \frac{a(z)}{r^n}\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{b(z)}{r^{2n}} U + \frac{c(z)}{r^{2n}} \bar{U} = \frac{f(z)}{r^{2n}} ,$$

и третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 U}{\partial \bar{z}^3} + \frac{a(z)}{r^n}\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} + \frac{b(z)}{r^{2n}}\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{c(z)}{r^{3n}} U + \frac{d(z)}{r^{3n}} \bar{U} = \frac{f(z)}{r^{3n}} ,$$

со сверхсингулярной точкой $z = 0$, где $U(z) = U_1(x,y) + iU_2(x,y)$, причем $U_2(x,y)$ и $U_1(x,y)$ – искомые функции, коэффициенты $a_k(x,y)$ и $b_k(x,y)$, $c_k(x,y) \in C^1(D \cup L)$ ограничены в начале координат, $f_k(x,y) \in L_p^{\mathrm{loc}}(D_0 \cup L)$, $k = \overline{1,2}$, $n \in R^+ = (0,\infty)$, $r = |z|$.

Результаты исследований уравнений со сверхсингулярной точкой опубликованы в работах [12-21].

Оказалось, что для корректности указанных задач мало традиционных условий на границе области; нужны дополнительные условия на границе некоторого оператора от решений. В данном случае, т.е. для уравнения (1), эти условия вызваны наличием сингулярной окружности $z\bar{z} = R^2$ и ее характером (сингулярностью и сверхсингулярностью). Для построения соответствующего граничного оператора используется информация о решении, полученная с помощью анализа его интегрального представления. В полученных интегральных представлениях четко выделена особая часть решений, которая позволяет легко изучить поведение решений при $r \to R$. Изучено влияние сверхсингулярной окружности к разрешимости краевых задач и выяснена корректная постановка ряда граничных задач типа Дирихле и Римана-Гильберта.

2. Интегральные представления и граничные задачи для система Бицадзе с сверхсингулярной окружностью

Через $\lambda_j(z) = e^{i\theta}\lambda_j^0(z)$, $j = 1,2$ обозначим корни определяющего уравнения

$$\lambda^2(z) + a(z)\lambda(z) + b(z) = 0\,; \tag{2}$$

при этом $\lambda_j^0(z)$ – корни квадратного уравнения $\lambda^2(z) + a_0(z)\lambda(z) + b_0(z) = 0$. Как показывает дальнейшее исследование, кратность корней определяющего уравнения (2) и тип сингулярностей (*слабая сингулярность* при $n < 1$, сингулярность при $n = 1$ и сверхсингулярность при $n > 1$) играют большую роль в структуре решений системы (1) и их интегральных представлений.

Задача типа Дирихле D_1. *Требуется найти решение уравнение (1) (при $n > 1$) из класса $C^2(D) \cap C(D \cup \partial D)$ при следующих граничных условиях:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left[\exp(-\omega_a(z) + W_a(z))\, L_\varphi U\right]_{\partial D} = g_1(t)\,, \\ &\mathrm{Re}\left[\exp(-W_\varphi(z))\, U\right]_{\partial D} = g_2(t)\,; \qquad g_k(t) \in C(\partial D)\,, \quad k = 1,2\,; \\ &\qquad t \in \partial D\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где $L_\varphi = \partial_{\bar z} - \varphi(z)$,

$$\omega_a(z) = \frac{2a_0(R)}{(1-n)(R-r)^{n-1}}\,,$$

$$W_\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

$$W_a(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{e^{i\theta}\left(\lambda_2^0(\zeta) + a(R)\right)}{\left(R - \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)^n (\zeta - z)}\, d\zeta\,.$$

Задача типа Дирихле D_2. *Требуется найти решение уравнения (1) (при $n = 1$) из класса $C^2(D) \cap C(D \cup L)$ при следующих граничных условиях:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left[(R - |z|)^{a_0(z)} \exp(W_a(z)) \left(\frac{\partial U}{\partial \bar z} - \frac{\lambda_1(z)}{(R-r)^2} U\right)\right]_{\partial D} = g_1(t)\,, \\ &\mathrm{Re}\left[\exp(W_\varphi(z))\, U\right]_{\partial D} = g_2(t)\,; \qquad g_k(t) \in C(\partial D),\ k = 1,2\,; \\ &\qquad t \in \partial D\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Задача типа Гильберта (G) *Требуется найти решения уравнение (1) (при $n > 1$) из класса $C^2_{\bar z}(D)$ такие, что $\exp(-W_\varphi(z))U(z)$, $\exp(-\omega_a(z) + W_a(z))\, L_\varphi U(z) \in C^{0,\alpha}(\bar D)$ и удовлетворяющие на границе ∂D условиям*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left[(a_1(t) - ib_1(t)) \exp(-\omega_a(t) + W_a(t))\, L_\varphi U(z)\right]_{\partial D} = g_1(t)\,, \\ &\mathrm{Re}\left[(a_2(t) - ib_2(t)) \exp(W_\varphi(t))\, U(t)\right]_{\partial D} = g_2(t)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

где $a_k(t)$, $b_k(t)$, $g_k(t)$, $k = 1,2$ – заданные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α.

Решение задачи D_1.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) при $n > 1$, функции $a_0(z) \in C^1(\bar D)$, корни определяющего уравнения (2) являются различными и функции $a(z)$ и $b(z)$ между собой связаны при помощи формулы*

$$b(z) = -(R-r)^n \varphi(z)(a(z) + (R-r)^n \varphi(z))\,, \tag{6}$$

где $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ – заданные комплекснозначные функции, $n \in R^+ = (0, \infty)$. Пусть в системе (1) $n > 1$, функция $b(z) \in C^1(\bar{z})$ и функции $a(z) = r^n \varphi(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ связаны между собой при помощи формулы $c(z) = b(z) r^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция.

Задача типа Дирихле D_3. *Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^2(D) \cap C(D \cup \{0\} \cup \partial D)$ при следующих граничных условиях:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left[\exp(-\omega_b(z) + W_b(z))\, L_\varphi U\right]_{\partial D} = g_1(t)\,, \\ &\mathrm{Re}\left[\exp(-W_\varphi(z))\, U\right]_{\partial D} = g_2(t)\,; \qquad g_k(t) \in C(\partial D)\,, \quad k = 1, 2\,; \\ &\qquad\qquad t \in \partial D\,, \end{aligned} \tag{16}$$

где $L_\varphi = \partial_{\bar{z}} - \varphi(z)$;

$$\omega_b(z) = \frac{2b_0(R)}{(n-1)r^{n-1}}\,,$$

$$W_\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

$$W_b(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{e^{i\theta}\left(\lambda_2^0(\zeta) - b_0(R)\right)}{\left(R - \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)^n (\zeta - z)}\, d\zeta\,.$$

Для системы Бицадзе с сверхсингулярной точкой и окружностью (15) найдено интегральное представление решения и соответствующие формулы обращения. Полученные интегральные представления позволяет исследовать поведение решений при $r \to 0$ и $r = |z| \to R$. Получено утверждение, также о корректности постановке граничной задачи D_3.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 510 с.

3. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами / Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1963. – 183 с.

4. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. -– 236 с.

5. Rajabov N.R. Integral representations and boundary value problems for some second order linear elliptic systems with regular and singular coefficients // in: Complex Analysis and applications 87 / P.431-441.

6. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши-Римана с сингулярной точкой / Душанбе: Изд. АН Тадж. ССР, 1993. – 244 с.

7. Солдатов А.П. Эллиптические системы второго порядка в полуплоскости // Изв. РАН. – 2006. – 70;6. – С.161–192.

8. Солдатов А.П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1991. – 55:5. – С.1070-1100.

9. Сакс Р.С. Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений / Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1975.

10. Сакс Р.С. О задаче Дирихле для эллиптической системы А.В. Бицадзе с младшими производными / Дифф. уравнения. – 1971. – 7. – С.121-134.

11. Товмасян Н.Е. Об устранимых особых точках эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости / Матем. сб. – 1979. – 108(150);1. – С.22–31.

12. Раджабов Н.Р. Расулов А.Б. Интегральные представление и граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярным многообразием // Дифференц. уравнения. Минск. – 1989. – 25;7. – С.1279-1981.

13. Расулов А.Б. Интегральные представление для одной системы второго порядка со сверхсингулярной точкой // Дифференциальные уравнения, Минск. – 2004. – 40;8. – С.1133-1138.

14. Расулов А.Б. Задача Римана в полуокружности для обобщенной системы Коши-Римана с сингулярной линией // Дифференциальные уравнения, Минск. – 2004. – 40;9. – С.1990 -1992.

15. Расулов А.Б. Исследование одной линейной эллиптической системы третьего порядка с внутренней сверхсингулярной точкой / Вестник МЭИ. – 2007. – 6. – С.43-48.

16. Расулов А.Б. Интегральные представления и граничные задачи для линейной эллиптической системы третьего порядка с внутренней сингулярной точкой / Вестник МЭИ. – 2008. – 6. – С.103-107.

17. Расулов А.Б. Интегральные представления и граничные задачи для эллиптической системы второго порядка с сингулярной точкой // Дифференциальные уравнения. Минск. – 2010. – 46;1. – С.1-7.

18. Расулов А.Б. Задачи типа Дирихле и Гильберта для эллиптических систем второго и третьего порядка с сверхсингулярной точкой // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2010. – 5(76). – С.127-134.

19. Расулов А.Б. Задачи типа Дирихле для некоторых модельных эллиптических уравнений эллиптического типа с сверхсингулярной точкой // Вестник МЭИ. – 2010. – 6. – С.47-54.

20. Расулов А.Б. Интегральные представления решений линейной эллиптической системы второго порядка с внутренней сверхсингулярной точкой // ДАН России. – 2009. – 429;6. – С.735–737.

21. Расулов А.Б.Интегральные представления и граничные задачи для линейной эллиптической системы третьего порядка с внутренней сверхсингулярной точкой // Дифференциальные уравнения. Минск. – 2011. – 47;2. – С.287–290.

ON CORRECT FORMULATION OF PROBLEMS FOR BITSADZE's SYSTEM WITH SUPERSINGULAR POINT AND CIRCLE

N.R. Radjabov*, **A.B. Rasulov****

*Tajik National State University,
Rudaki St., 17, Dushanbe, 734 019, Tajikistan, e-mail: nusrat38@mail.ru;
**Moscow Power Engineering Institute,
Krasnokazarmennaya St., 14, 111250, Moscow, e-mail: rasulov_abdu@rambler.ru

Abstract. Paper is devoted to integral representations and its inversion formulas for second order linear elliptic systems with supersingular circle. Obtained integral representations should be applied to examination of solution asymptotic behavior at $r \to R$ and also to study the solution of boundary value problems.

Key words: elliptic systems, integral representations, supersingular circle, boundary value problems.